УДК 517.929

© *Т. Л. Сабатулина*

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОГО АВТОНОМНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Для линейного автономного дифференциального уравнения с сосредоточенным и распределённым запаздываниями получены необходимые и достаточные признаки экспоненциальной устойчивости в терминах параметров исходной задачи.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с запаздыванием, экспоненциальная устойчивость, характеристическая функция.

При моделировании экологических систем, включающих одновременно запаздывание и диффузию, возникает дифференциальное уравнение в частных производных с распределённым запаздыванием. Классическим методом разделения переменных эта задача сводится к исследованию одномерного дифференциального уравнения с запаздыванием (см. [1, 2]), асимптотическое поведение которого необходимо изучить.

Рассмотрим линейное автономное дифференциальное уравнение с сосредоточенным и распределённым запаздываниями:

$$\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-h) + k\int_{t-h}^{t} x(s)\,ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $a, b, k, h \in \mathbb{R}$. Будем считать, что при отрицательных значениях аргумента x доопределено начальной функцией φ.

Под решением понимается (см. [3, с. 13], [4, с. 50]) абсолютно непрерывная функция x, удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду.

Цель настоящей работы — получение необходимых и достаточных признаков экспоненциальной устойчивости (совпадающей с асимптотической устойчивостью) и равномерной устойчивости (совпадающей с устойчивостью по Ляпунову) (см. [3, с. 89–90], [4, с. 130]). Как известно, ответ на эти вопросы даёт исследование расположения нулей характеристической функции $g(p) = p + a + be^{-ph} + \frac{k}{p}\left(1 - e^{-ph}\right)$ относительно мнимой оси.

Введём в системе координат $Ouvw$ поверхность

$$\Gamma = \left\{u = -2\theta \operatorname{ctg}\theta + v, \quad w = \tfrac{\theta(2\theta - v\sin 2\theta)}{\sin^2\theta}, \quad \theta \in [0,\pi)\right\}.$$

Поверхность Γ и плоскость $u+v+w = 0$ ограничивают область D, содержащую положительную полуось Ou.

Т е о р е м а 1. *Уравнение* (1) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда точка* $\left\{ah, bh, kh^2\right\}$ *принадлежит области* D.

Теорема 1 включает в себя результаты, полученные в работах [1, 2, 5–7].

С л е д с т в и е 1 (см. [1, 2, 6]). *Пусть* $a = 0$. *Тогда для экспоненциальной устойчивости уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство* $-bh < kh^2 < -\frac{2\theta^2\cos 2\theta}{\sin^2\theta}$, *где* θ *— наименьший положительный корень уравнения* $bh = 2\theta \operatorname{ctg}\theta$.

С л е д с т в и е 2 (см. [1, 2, 5]). *Пусть* $b = 0$. *Тогда для экспоненциальной устойчивости уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство* $-ah < kh^2 < \frac{2\theta^2}{\sin^2\theta}$, *где* θ *— наименьший положительный корень уравнения* $ah = -2\theta\operatorname{ctg}\theta$, $ah > -2$.

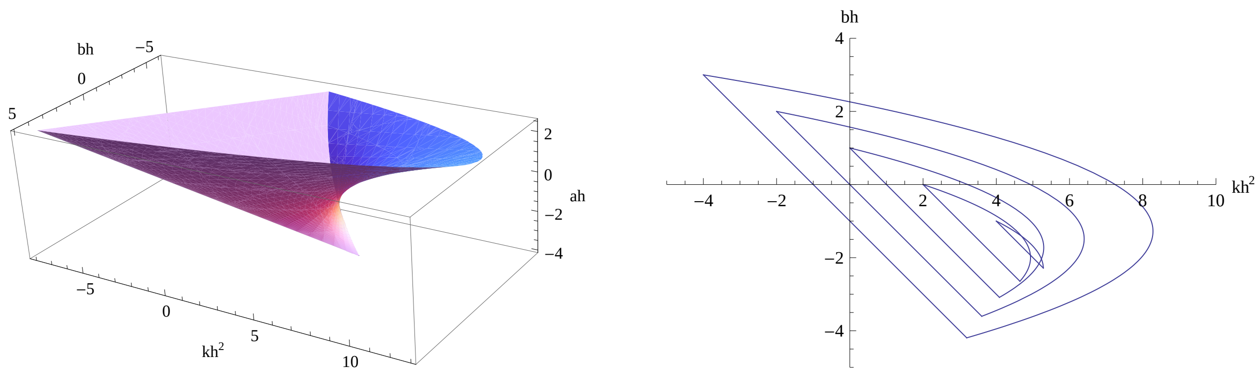

Рис. 1. Область D (слева) и сечения области D при фиксированных ah (справа).

С л е д с т в и е 3 (см. [7]). *Пусть $k = 0$. Тогда для экспоненциальной устойчивости уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $-ah < bh < \frac{\theta}{\sin\theta}$, где θ — наименьший положительный корень уравнения $ah = -\theta \operatorname{ctg}\theta$, $ah > -1$.*

Исследуем поведение решений на границе области D. Здесь возможны три случая.

Если $ah = -4$, $bh = -2$, $kh^2 = 6$, характеристическая функция $g(p)$ имеет нуль кратности 3. Это означает, что уравнение (1) имеет неограниченное квадратичное решение: при $\varphi(t) = t^2$ уравнение (1) имеет решение $x(t) = t^2$.

Если $ah = bh - 2$ и $kh^2 = 2(1 - bh)$, причём $ah > -4$, $g(p)$ имеет нуль кратности 2. Это означает, что уравнение (1) имеет неограниченное линейное решение: при $\varphi(t) = t$ уравнение (1) имеет решение $x(t) = t$.

На других участках границы области D характеристическая функция имеет корни на мнимой оси, но они не являются кратными, то есть уравнение (1) равномерно устойчиво.

Список литературы

1. Wu S., Gan S. Analytical and numerical stability of neutral delay integro–differential equations and neutral delay partial differential equations // Computers and Mathematics with Applications. 2008. № 56. P. 2426–2443.
2. Huang C., Vandewalle S. Stability of Runge–Kutta–Pouzet methods for Volterra integro-differential equations with delays // Front. Math. China. 2009. № 4 (1). P. 63–87.
3. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
4. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 424 с.
5. Сабатулина Т.Л. Об автономном дифференциальном уравнении с сосредоточенным и распределённым запаздываниями // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды шестой Всеросс. науч. конф. с международным участием. Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. СамГТУ. Самара, 2009. С. 192–194.
6. Сабатулина Т.Л., Малыгина В.В. Некоторые признаки устойчивости линейного автономного дифференциального уравнения с распределённым запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 2007. № 6. С. 55–63.
7. Андронов А.А., Майер А.Т. Простейшие линейные системы с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1946. Т. 7. № 2, 3. С. 95–106.

Поступила в редакцию 14.02.2012

T. L. Sabatulina

On stability of a linear autonomous differential equation with aftereffect

The necessary and sufficient conditions of exponential stability (in terms of parameters of the problem under consideration) are obtained for a linear autonomous differential equation with concentrated and distributed delays.

Keywords: differential equations with delay, exponential stability, characteristic function.

Mathematical Subject Classifications: 34K06, 34K20

Сабатулина Татьяна Леонидовна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра вычислительной математики и механики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский пр., 29. E-mail: tlsabatulina@list.ru

Sabatulina Tat'yana Leonidovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Perm National Research Polytechnic University, Komsomolskii pr., 29, Perm, 614990, Russia